فصلنامه پژوهش های مدیریت در جهان اسلام

شماره مجوز: ۸۵۴۹۵ شماره استاندارد بین المللی: ۶۰۹۴-۲۶۷۶ شماره بیست و دوم (بهار۱۴۰۴)

حل عددی کارآمد معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چند متغیره با استفاده از IMVM

(تاریخ ارسال ۱۴۰۴/۰۲/۱۹ تاریخ پذیرش ۱۴۰۴/۰۳/۰۲)

موسی حسنوند

چکیده

معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم از ابزارهای مهم در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های علمی و مهندسی به‌شمار می‌آیند، اما حل عددی آن‌ها در مسائل چندبعدی به دلیل پیچیدگی هسته، افزایش تعداد مجهولات و هزینه محاسباتی بالا با دشواری‌هایی همراه است. در این مقاله، یک روش عددی کارآمد مبتنی بر ترکیب قضیه مقدار میانگین انتگرال و توابع پالس بلوکی برای حل معادلات انتگرال فردهلم چندمتغیره ارائه می‌شود. در روش پیشنهادی، انتگرال‌های چندگانه به مجموعه‌ای از معادلات خطی مستقل تبدیل می‌شوند که این امر موجب کاهش چشمگیر ابعاد محاسباتی و جلوگیری از رشد نمایی مجهولات می‌گردد. استفاده از توابع پالس بلوکی به دلیل ساختار ساده و قطعه‌ای ثابت، منجر به تشکیل ماتریس های عملیاتی ساده و افزایش سرعت محاسبات می‌شود. نتایج عددی در مثال‌های دو و سه‌بعدی نشان می‌دهد که روش IMVM–BPF از دقت، پایداری و کارایی بالاتری نسبت به برخی روش های موجود برخوردار بوده و توانایی حل معادلات با هسته‌های ضعیف و قوی را دارد.

واژگان کلیدی: معادلات انتگرال فردهلم؛ قضیه مقدار میانگین انتگرال؛ توابع پالس بلوکی؛ حل عددی

۱. مقدمه

نظریه و کاربرد معادلات انتگرال یک موضوع مهم در ریاضیات کاربردی است. معادلات انتگرال به عنوان مدل‌های ریاضی برای حالت‌های فیزیکی متفاوت و زیادی به کار برده شده‌اند و همچنین معادلات انتگرال هنگام فرمول بندی مجدد و دوباره مسایل دیگر در ریاضیات مطرح می‌شوند (اتکینسون، ۱۹۷۷). آنها کاربردهای گوناگونی در بسیاری از حوزه‌ها مانند مکانیک پیوسته، نظریه پتانسیل، ژئوفیزیک، الکتریسیته و مغناطیس، نظریه جنبشی گازها، پدیده وراثت در فیزیک و زیست شناسی، نظریه تجدید و علم پزشکی دارد. بیشتر مسایل مقدار مرزی مانند معادلات دیفرانسیل می‌توانند فقط برحسب معادلات انتگرال فرمول بندی شوند. بنابراین یک رویکرد محاسباتی برای حل معادلات انتگرال، یک شاخه ضروری از تحقیقات علمی می‌باشد (کایت و پوری ، ۲۰۰۲).

مسایل زیادی در مهندسی و مکانیک می‌توانند به معادلات انتگرال دو بعدی تبدیل شوند. برای مثال، در محاسبات فیزیک پلاسما (فارنگو، لی، و گوزدار، ۱۹۸۳) معمولاً لازم می‌شود که معادلات انتگرال فردهلم را حل کنیم .

گراهام در (گراهام، ۱۹۸۱) یک کاربرد از معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی را در حل یک مسأله که در مهندسی برق پیش می‌آید نشان داده است. مکی و همکاران (۲۰۰۰) در یک دسته از معادلات تلگراف غیرخطی را به معادلات انتگرال ولترای دوبعدی کاهش داده‌اند. وشی ولین (۲۰۰۹) در یک روش حل عددی سریع برای معادلات انتگرال فردهلم دو بعدی خطی نوع دوم ارایه داده‌اند.

در ۲۰ سال گذشته پیشرفت‌های قابل توجهی در این زمینه حاصل شده است که شروع آنها با کار معروف و شناخته شده برونروکاوسن بوده در (برونر و کاتن، ۱۹۸۹) است. در این کار آنها روش‌های هم محلی و هم محلی تکراری را برای معادلات انتگرال ولترای دوبعدی ارایه

دادند. کاوسن در (۱۹۸۹) این کار ولترای غیرخطی را بررسی کرده است. این افراد خواص همگرایی محلی و کلی این روش‌ها را بررسی کرده‌اند و نتایجی در مورد مرتبه‌های همگرایی کلی و فوق همگرایی محلی به دست آورده‌اند.

سهم مهمی در این زمینه را می‌توان در کارهای گوجیانگ هان و همکارانش یافت. این افراد بسطهای خطای مجانبی را برای روش‌های کلاسیک متفاوتی، وقتی که این روش‌ها برای معادلات انتگرال دو بعدی به کار برده شده‌اند، به دست آورده‌اند و این بسطها را به عنوان یک پایه و اساس برای معرفی الگوریتم‌های برونیابی به کار برده‌اند. آنها این رویکرد را در به کار برده‌اند تا جواب معادله انتگرال ولترا و فردهلم خطی را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای نیستروم بررسی کنند. در تعدادی از پژوهش ها مانند (هان و همکاران، ۲۰۰۰) و (هان و ژانگ، ۱۹۹۴) روش هم محلی تکراری برای حل معادلات انتگرال ولترای دوبعدی غیرخطی به کار برده شده است. معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی هم به ترتیب با روش‌های نیستروم و گلرکین تکراری حل شده‌اند.

با وجود پیشرفت‌های ذکر شده، بسیاری از روش‌های عددی موجود برای حل معادلات انتگرال دوبعدی و سه‌بعدی با محدودیت‌هایی مانند پیچیدگی محاسباتی، دشواری تعمیم به ابعاد بالاتر و کاهش دقت در شبکه‌های درشت مواجه هستند. بنابراین، ارائه یک روش عددی ساده، دقیق و قابل تعمیم به ابعاد بالاتر، یک نیاز مهم در این حوزه محسوب می‌شود.

در این پژوهش، به بررسی و توسعه روش قضیه مقدار میانگین انتگرال[۱] برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم در ابعاد بالا پرداخته شده است. این روش به دلیل سادگی و

[۱] IMVM

انعطاف‌پذیری، قابلیت تبدیل معادلات انتگرال پیچیده به سیستم‌های معادلاتی قابل حل با روش‌های عددی کلاسیک مانند روش نیوتن را دارا می‌باشد. بنابراین،

اهداف اصلی این پژوهش عبارتند است از:

۱. معرفی و بررسی مقدمات ریاضی مرتبط با معادلات انتگرال و فضاهای خطی، به ویژه توابع پالس بلوکی و خواص آن‌ها.
۲. شرح و تعمیم روش IMVM از حالت یک‌بعدی به ابعاد بالاتر و پیاده‌سازی الگوریتم‌های مربوط.
۳. ارائه مثال‌های کاربردی از معادلات انتگرال دوبعدی و سه‌بعدی برای نشان دادن سادگی، دقت و انعطاف‌پذیری روش پیشنهادی.
۴. مقایسه روش IMVM با سایر روش‌های موجود به منظور اثبات کارآیی، دقت و مزیت‌های محاسباتی آن.

بدین ترتیب، این پژوهش می‌تواند علاوه بر توسعه روش‌های عددی مؤثر، پایه‌ای برای مطالعات آتی در حل معادلات انتگرال چندبعدی و کاربردهای مهندسی و فیزیکی آن فراهم آورد.

۲. مبانی نظری پژوهش

معادلات انتگرال، به‌ویژه معادلات فردهلم نوع دوم، از مهم‌ترین ابزارها در تحلیل مسائل ریاضی و مدل‌های فیزیکی محسوب می‌شوند. این معادلات معمولاً در مسائلی ظاهر می‌شوند که در آن‌ها رفتار یک تابع مجهول تحت تأثیر یک هسته انتگرالی قرار دارد و بنابراین تحلیل پایداری، وجود و یکتایی جواب و همچنین ارائه روش‌های عددی کارآمد برای آنها اهمیت زیادی دارد. معادلات فردهلم نوع دوم به دلیل حضور تابع مجهول هم در داخل و هم بیرون از

علامت انتگرال، ساختارهایی مناسب برای تقریب و تبدیل به روابط خطی دارند و بنابراین بستر مناسبی برای روش‌های عددی مانند IMVM فراهم می‌سازند.

در این پژوهش، با هدف حل دقیق‌تر معادلات فردهلم چندبعدی، ابتدا ساختار کلی این معادلات و رفتار هسته آن‌ها بررسی می‌شود. سپس توابع پالس بلوکی به‌عنوان پایه‌های مناسب برای تقریب تابع مجهول معرفی می‌شوند. در ادامه، قضیه مقدار میانگین انتگرال و نقش آن در کاهش ابعاد محاسباتی و تبدیل انتگرال‌های چندگانه به روابط مستقل خطی تشریح خواهد شد. این مبانی، چارچوب نظری لازم برای توسعه روش IMVM و به‌کارگیری آن در حل معادلات فردهلم در ابعاد بالا را فراهم می‌سازد.

۲.۱ انواع معادلات انتگرال و فردلهم

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می‌شود. بدیهی است که در چنین معادله‌ای عبارات دیگر هم می‌توانند وجود داشته باشند. معادلات انتگرال به طور طبیعی در بسیاری از شاخه‌های مکانیک و فیزیک ریاضی ظاهر می‌شود. این معادلات همچنین در فرمول بندی مجدد جواب معادلات دیفرانسیل کاربرد پیدا می‌کنند.

۲.۱.۱ معادلات انتگرال یک بعدی

روش‌های استاندارد برای معادلات انتگرال، در مورد معادلات یک بعدی به فرم‌های

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a \le x \le b,$$

یا

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a \le x \le b,$$

بحث می‌کند که در آن λ یک پارامتر عددی (احتمالاً مختلط) است و $f(x)$ معلوم است (و اغلب جمله پیشرو نامیده می‌شود) اما $u(t)$ معلوم نیست. معادلات فوق به ترتیب معادلات فردهلم خطی نوع اول و دوم برای تابع مجهول $u(t)$ هستند.

۲.۱.۲ معادلات انتگرال چندبعدی

همچنین ما می توانیم معادلات انتگرالی را در نظر بگیریم که در آن تابع مجهول نه فقط به یک متغیر بلکه به چند متغیر وابسته است (اتکینسون، ۱۹۹۷).

فرض کنید $D=\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]$ یک مجموعه بسته و کراندار در R^d است، $a_i,b_i\in R$ و برخی $d>1$، و نماد زیر را در نظر بگیرید:

$$x=(x_1,x_2,.....,x_d), \qquad \forall x\in D$$

برای هر $x,t\in D$ می گوییم $x<t$ اگر $x_i<t_i$ $i=1,2,.....,d$.

۲.۱.۳ معادلات فردهلم

همچنین می توان معادلات فردهلم غیرخطی چندبعدی را به صورت زیر تعریف نمود.

معادلات فردهلم d- بعدی غیرخطی نوع اول:

$$f(x)=\lambda\int_D k(x,t,u(t))dt, \qquad x\in D,$$

نوع دوم:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_D k(x,t,u(x),u(t))\,dt, \qquad x\in D,$$

نوع سوم:

$$u(x)=\lambda\int_D k(x,t,u(x),u(t))\,dt, \qquad x\in D,$$

۲.۲ توابع پالس بلوکی

از بین همه توابع بلوکی ثابت قطعه‌ای، اساسی ترین آنها توابع پالس بلوکی (BPF) هستند و خواص کمی و کیفی آنها به وسیله دب و همکاران در (دب و سن، ۱۹۹۴)عرفی شده‌اند. برجسته‌ترین خاصیت این مجموعه از توابع خاصیت قطعه‌ای ثابت بودن آنها است. این توابع به عنوان ابزار مفیدی در تجزیه و تحلیل، استنتاج همانندسازی و دیگر مسایل کنترل و علم سیستمها به کار برده شده‌اند (تزافستاِس، ۱۹۸۵).این مجموعه از توابع در ابتدا به وسیله هارموس در سال ۱۹۶۹ به مهندسان الکترونیک معرفی شد و به خاطر استفاده‌های سریع و آسان آنها، به طور وسیعی برای مسایل یک بعدی به کار برده شدند (جیانگ و شافلبِرگر، ۱۹۹؛ راو، ۱۹۸۳).

یک خاصیت جالب توابع پالس بلوکی این است که محاسبه انتگرال های چنین توابعی بسیار ساده است. بنابراین هنگام حل عددی معادلات دیفرانسیل یا انتگرال، استفاده از یک پایه از توابع پالس بلوکی بسیار سودمند است. یک مجموعه m - تای از توابع پالس بلوکی روی بازه $[0,T)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi_i(t)=\begin{cases}1, & ih\le t<(i+1)h,\\ 0, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که در آن $i=0,1,.....,m-1$، $h=\frac{T}{m}$ و m یک عدد طبیعی مثبت است. تابع $\phi_i(t)$، i- امین تابع پالس بلوکی نامیده می‌شود.

بدون از دست رفتن کلیت موضوع فرض کنید T =۱، بنابراین $h=\frac{1}{m}$.

طبق تعریف واضح است که

$$\int_0^1 \phi_i(t)dt=h, \qquad i=0,1,....,m-1,$$

از بین خواص متفاوت توابع پالس بلوکی، مهمترین آنها جدا از هم بودن، متعامد بودن و کامل بودن می‌باشد. از تعریف توابع پالس بلوکی داریم:

$$\phi_i(s),\phi_j(s) = \begin{cases} \phi_i(s), & i=j, \\ ۰, & i \neq j, \end{cases} \qquad (۱۰۶.۲)$$

که در آن $i, j = ۰,۱,..., m-۱$ از این خاصیت به عنوان جدا از هم بودن توابع پالس بلوکی یاد می‌شود.

با استفاده از رابطه بالا و خاصیت جدا از هم بودن، به دست می‌آوریم:

$$\int_۰^۱ \varphi_i(s)\varphi_j(s)dt = h\delta_{ij},$$

که در آن $i, j = ۰,۱,.....,m-۱$ و δ_{ij} دلتای کرونکر است. بنابراین، همه توابع پالس بلوکی $\phi_i(s)$ بر یکدیگر عمود هستند.

خاصیت دیگر کامل بودن است. برای یک تابع دلخواه f در $\mathcal{L}^۲([۰,۱))$، وقتی m به بینهایت میل می کند، تساوی پارسوال به صورت زیر برقرار است:

$$\int_۰^۱ f^۲(s)ds = \sum_{i=۰}^{\infty} f_i^۲ \| \varphi_i(s) \|^۲,$$

که در آن

$$f_i = \frac{۱}{h}\int_۰^۱ f(s)\varphi_i(s)ds.$$

۳. تعمیم روش IMVM و ساختار الگوریتمی آن

در روشIMVM ، با تعمیم آن به ابعاد بالاتر و پیاده‌سازی الگوریتم‌های مربوط، معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم در ابعاد بالا به یک سیستم معادلاتی تبدیل می‌شوند که سپس با روش‌هایی مانند روش نیوتن قابل حل هستند.

۳.۱ شرح روش قضیه مقدار میانگین (IMVM)

معادله‌ی انتگرال فرد هلم نوع دوم را در نظر بگیرید:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t)) dt, \qquad x, t \in [a \quad b]$$

که در آن λ یک عدد حقیقی و همچنین F، f و k توابعی پیوسته هستند و u تابع مجهول است. اکنون قضیه مقدار میانگین انتگرال برای معادله بالا را بکار می‌گیریم:

مقدار میانگین انتگرال: اگر $w(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه وجود دارد نقطه C و $C \in [a,b]$ بطوریکه:

$$\int_a^b w(x) dx = (b-a) w(c)$$

اکنون حل معادله بالا را بوسیله قضیه مقدار میانگین شرح می‌دهیم:

با توجه به توضیحات بالا و $\int_a^b k(x,t) F(u(t)) dt$ از آنجایی که انتگرال به نسبت به متغیر x مستقل است و c می‌تواند یک تابع نسبت به x است در اینجا آنرا به عنوان c(x) می‌نویسیم.

که در آن $u(x) = f(x) + \lambda (b-a) k(x, c(x)) F(u(c(x))$

$$x \in [a \; b], c(x) \in [a \; b]$$

در عمل برای پیاده سازی الگوریتم، c(x) را به عنوان یک ثابت در نظر می گیریم.

$$u(x) = f(x) + \lambda(b-a)k(x,c)F(u(c))$$

که در آن $c \in [a,b]$

بنابراین با یافتن مقادیر C و $u(c)$ معادله انتگرال حل می شود.

الگوریتم زیر طریقه یافتن c، $u(c)$ را تشریح می کند.

الگوریتم (۱): I) با جایگزاری c در معادله بالا، معادله زیر بدست می آید:

$$u(c) = f(c) + \lambda(b-a)k(c,c)F(u(c)).$$

II) با جایگزاری در معادلات بالا

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_b^a k(x,t)F\left(f(t) + \lambda(b-a)k(t,c)F(u(c))\right)dt$$

III) با قرار دادن C در معادله بالا، معادله زیر بدست می آید:

$$u(c) = f(c) + \lambda\int_a^b k(c,t)F\left(f(t) + \lambda(b-a)k(t,c)F(u(c))\right)dt$$

با جایگزاری پی در پی به معادلات مستقل خطی مورد نیاز می‌رسیم که برای حل سیستم‌های غیرخطی معادلات می‌توانیم از روشهای مختلف استفاده نمود در اینجا برای حل سیستم بدست آمده از روش نیوتن استفاده می‌شود.

۳.۲ حل معادلات انتگرال تک بعدی با استفاده از (IMVM):

معادله‌ی انتگرال نوع دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u(x_1,x_2,....,x_n)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\lambda\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}...\int_{a_n}^{b_n}k(x_1,x_2,...x_n,t_1,t_2,...,t_n)F(u(t_1,...t_n))dt_n...dt_1$$

با توجه به $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ و $T=(t_1,t_2,....,t_n)$

معادله به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$u(X)=f(X)+\lambda\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}.....\int_{a_n}^{b_n}k(X,T)F(u(T))dt_n...dt_1$$

برای انتگرالهای چندگانه، مشابه بخش‌های قبلی از قضیه مقدار میانگین انتگرال یک بعدی به طور مستقیم استفاده می‌کنیم تا به معادلات مستقل خطی مورد نیاز دست پیدا کنیم.

استدلال: اگر تابع $s(X)$ روی $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times.....\times[a_n,b_n]$ پیوسته باشد

آنگاه نقاط $c_i\in[a_i,b_i]$ و $i=1,2,.....,n$ وجود دارند بطوریکه:

۱) $\int_{a_1}^{b_1}s(X)dx_1=(b_1-a_1)s(c_1,x_2,.....,x_n)$

۲) $\int_{a_2}^{b_2}s(X)dx_2=(b_2-a_2)s(x_1,c_2,x_3,.....,x_n)$

$$(i)\int_{a_i}^{b_i}s(X)dx_i=(b_i-a_i)s(x_1,x_2,.....x_{i-1}c_i,x_{i+1},.....,x_n)$$

$$(n)\int_{a_n}^{b_n}s(X)dx_n=(b_n-a_n)s(x_1,x_2,.....,x_{n-1},c_n)$$

اثبات: با استفاده از قضیه بالا واضح است.

قضیه (قضیه مقدار میانگین انتگرال چندگانه)

اگر $s(X)$ روی $[a_i, b_i]$ $i = ۱,۲,....,n, c_i \in$ بطوریکه:

$$\int_{a_۱}^{b_۱}\int_{a_۲}^{b_۲}...\int_{a_n}^{b_n} s(X)\,d_{x_n}\,d_{x_{n-۱}}...\,d_{x_۱} = \prod_{j=۰}^{n-۱}(b_{n-j} - a_{n_{-j}})s(c_۱, c_۲, ..., c_n)$$

با استفاده از فرمول های بالا و قسمت سمت راست از انتگرال:

$$\int_{a_۱}^{b_۱}\int_{a_۲}^{b_۲}...\int_{a_n}^{b_n} k(X,t)F(u(t)F(u(t))dt_n d_{t_{n-۱}}..... d_{t_۱}$$

وابسته به متغیرهای $x_۱, x_۲, ..., x_n$ و نقاط $c_۱, c_۲, ..., c_n$ است خواسته شده در تابع متناظر با $x_۱, x_۲, ..., x_n$ خواهد بود بطوریکه در اینجا $c_i(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ و $i = ۱,۲,..., n$ و $x_i \in [a_i, b_i]$ و $i = ۱,۲,....., n$.

مشابه موارد قبلی در عمل برای پیاده سازی الگوریتم $c_i(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ و $i = ۱,۲,....., n$ را به عنوان ثابت در نظر می گیریم.

در روش مشابه برای پیدا کردن $u(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ ابتدا بایستی نقاط $c_۱, c_۲, ..., c_n$ و سپس $u(c_۱, c_۲, ..., c_n)$ را بدست آوریم که با جایگزاری پی در پی الگوریتم به سیستم معادله خطی n+۱ معادله و n+۱ مجهول دست می‌یابیم.

برای ساختن سایر معادلات این روند اثبات شده، تکرار می‌شود.

مثلاً برای ساختن معادله‌ی iام به صورت زیر عمل می کنیم.

$$u(X)=f(X)+\lambda\prod_{j=0}^{i-1}(b_{n-j}-a_{n-j})\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}k(X,\xi_{n-i+1})F(f(\xi_{n-i+1})+$$

$$\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(b_{n-j}-a_{n-j})k(\xi_{n-i+1},\xi_1)F(u(\xi_1)))dt_{n-i},\dots.dt_1$$

بطوریکه: $i=1,2,\dots\dots,n-1$.

معادله زیر را نتیجه می‌دهد.

$$u(\xi_1)=f(\xi_1)+\lambda\prod_{j=0}^{i-1}(b_{n-j}-a_{n-j})\int_{a_1}^{b_1}\dots.\int_{a_{n-i}}^{bn-i}k(\xi,\xi_{n-i+1})F\Big(f((\xi_{n-i+1})+$$

$$\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(b_{n-j}-a_{n-j})k(\xi_{n-i+1},\xi_1)F(u(\xi_1))\Big)dt_{n-i},\dots.dt_1 \qquad i=1,2,\dots n-1 \qquad (۳۴.۳)$$

معادله (۳. ۳۴) معادله iام است

بنابراین می‌توانیم n-۱ معادله‌ی جدید را بدست آوریم و $i=1,2,\dots\dots,n-1$ اما سیستم نهایی موردنظر شامل n+۱ و معادله و n+۱ مجهول است بنابراین اگر در معادله (۳. ۳۴) قرار دهیم i=n به معادله‌ی nام می رسیم.

اجرای مرحله قبلی برای بدست آوردن معادله‌ی n+۱ام:

$$u(X)=f(X)+\lambda\int_{a_1}^{b_1}\dots..\int_{a_n}^{b_n}k(X,T)F\left(f(T)+\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(b_{n-j}-a_{n-j})k(T,\xi_1)F(u(\xi_1)\right)dt_n\dots.dt_1$$

نهایتاً با جایگزاری $X=\xi_1$ در (۳. ۳۵) معادله‌ی زیر بدست می‌آید.

$$u(\xi_1)=f(\xi_1)+\lambda\int_{a_1}^{b_1}\dots..\int_{a_n}^{b_n}k(\xi_n,T)F\left(f(T)+\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(b_{n-j}-a_{n-j})k(T,\xi_n)F(u(\xi_n)\right)dt_n\dots dt_1$$

در نهایت آخرین معادله‌ی سیستم موردنظر که شامل n+۱ معادله و n+۱ مجهول است ساخته می‌شود.

برای حل سیستم غیرخطی معادله های بالا می توانند با استفاده از روش نیوتن و یا سایر روش‌های کارآمد دیگر حل می‌شوند.

الگوریتم زیر چگونگی بکارگیری قضیه مقدار میانگین برای بدست آوردن سیستم معادلات مستقل خطی را بیان می کند.

$$E_1: u(\xi_1)=f(\xi_1)+(b_n-a_n)\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} k(\xi_1,\xi_n)F\Big(f(\xi_n)+\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(b_{n-j}-a_{n-j})$$

$$k(\xi_n,\xi_1)F(u(\xi_1))\Big)dt_{n-1}\ldots dt_1$$

$$E_i: u(\xi_1)=f(\xi_1)+\lambda\prod_{j=0}^{i-1}(b_{n-j}-a_{n-j})\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} k(\xi_1,\xi_{n-i+1})F\Big(f(\xi_{n-i+1})$$

$$+\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(b_{n-j}-a_{n-j})k(\xi_{n-i+1},\xi_1)F(u(\xi_1))\Big)dt_{n-i}\ldots dt_1$$

$$i=1,2,3,\ldots\ldots\ldots,n-1$$

$$E_n: u(\xi_1)=f(\xi_1)+\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(b_{n-j}-a_{n-j})k(\xi_1,\xi_1)F(u(\xi_1)).$$

$$E_{n+1}: u(\xi_1)=f(\xi_1)+\lambda\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n} k(\xi_1,T)F\Big(f(T)+\lambda\prod_{j=0}^{n-1}(b_{n-j}-a_{n-j})k(T,\xi_1)F(u(\xi_1))\Big)dt_n\ldots dt_1$$

بنابراین ، با توجه به اینکه حل معادلات سیستم نهایی موردنظر به طور چشم گیری طولانی مدت می باشد توصیه می‌شود برای کاهش این هزینه از قاعده انتگرال گیری عددی گاوس و یا روش ذوزنقه‌ای استفاده شود.

۳.۳ حل عددی معادلات انتگرال در ابعاد بالا با استفاده از روش IMVM

ما می‌توانیم روش ارایه شده برای سیستم‌های شامل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم در ابعاد مختلف را توسعه دهیم. این عملکرد در بخش قبلی برای معادلات انتگرال یک بعدی توضیح داده شد. این روش برای حل معادلات انتگرال در ابعاد مختلف، روشی انعطاف پذیر، کارآمد

و ساده می‌باشد. با انتخاب مثالهایی از معادلات انتگرال نوع دوم، دو بعدی و سه بعدی کاربرد و انعطاف روش IMVM نشان داده می‌شود.

همچنین این روش برای مسائل مختلف و حل سیستم معادلات انعطاف پذیرتر است و برتری این روش در مقایسه با دیگر روش‌هایی که به حل معادلات انتگرال دو بعدی پرداخته‌اند در ادامه نشان داده می‌شود.

در مقایسه بین نتایج عددی آنها کارایی و سادگی این روش قابل توجه است. محاسبات مرتبط با این مثالهای حل شده با استفاده از maple ۱۳ در رایانه شخصی انجام شده است.

مثال ۱) معادله انتگرال خطی دوبعدی زیر را در نظر بگیرید.

$$u(x,y)=f(x,y)+\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(t\sin s+1)u(t,s)\,dtds$$

که در آن: $0\le x,y\le 1$.

$$f(x,y)=x\cos y-\frac{1}{6}(\sin 1+3)\sin 1$$

جواب دقیق $u(x,y)=x\cos y$ می باشد.

با استفاده از روش ارایه شده به سیستم معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{6}\sin 1^{2}+\frac{1}{2}\sin 1-c_1(\cos c_2+c_3\sin c_2)=0$$

$$\frac{1}{12}(6c_3-3\sin 1-\sin 1^{2}+6c_3c_1\sin c_1)\cos 1-\frac{1}{2}c_3(3c_1\sin c_2+1)-c_1\cos c_2$$

$$+\frac{3}{4}\sin 1+\frac{5}{12}\sin 1^{2}=0$$

$$\frac{1}{12}(6c_3-3\sin 1-\sin 1^{2}+6c_3c_1\sin c_1)\cos 1-\frac{1}{2}c_3(3c_1\sin c_2+1)-c_1\cos c_2$$

$$+\frac{1}{6}(\cos 1^{2}-1)+\frac{3}{4}\sin 1+\frac{5}{12}\sin 1^{2}=0,$$

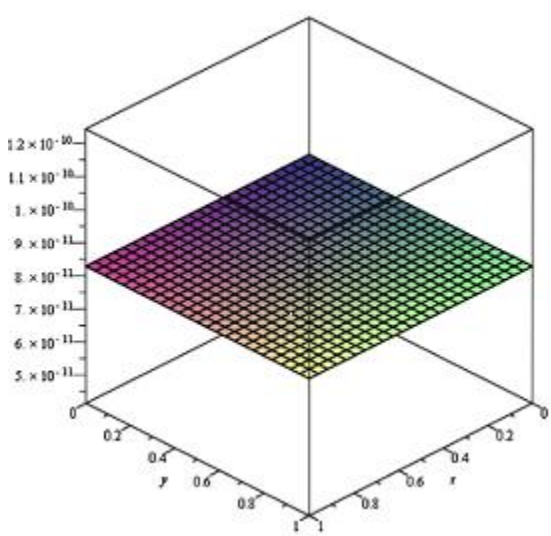
$$\frac{۱}{۱۲}(-۴\cos c_۲ + ۳\sin ۱ + \sin ۱^۲ - ۶c_۳ - ۱۲c_۳c_۱)\sin c_۲ - \frac{۱}{۲}(۱+۲c_۱)\cos c_۲$$

$$-\frac{۱}{۲}c_۳c_۱\sin c_۲^۲ + \frac{۱}{۳}\sin ۱^۲ + \sin ۱ = ۰,$$

که مقادیر $c_۲, c_۱, c_۳ = u(c_۱, c_۲)$ با استفاده از الگوریتم ارایه شده به صورت زیر است:

$$c_۱ = ۰.۵۳۲۸۶۸۶۵۹۵, \qquad c_۲ = ۰.۷۲۸۲۵۵۵۱۵۹, \qquad u(c_۱, c_۲) = ۰.۳۹۷۶۹۹۳۸۹۶$$

تابع خطا در شکل (۱) نشان داده شده است، با توجه به اینکه خطای مطلق $۱/۲\times۱۰^{-۱۰}$ تا ۱۰ رقم اعشار نمایش داده شده است. جواب آن تقریباً معادل جواب دقیق است. واضح است می‌توان با افزایش ارقام به طور قابل توجهی جواب تقریبی را هم بهبود بخشید.



شکل ۱

مثال ۲) معادله‌ی غیرخطی دوبعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x,y) = f(x,y) + \int_۰^۱ \int_۰^۱ (t\sin s + ۱)u^۳(t,s)\,dtds, \quad ۰ \le x, y \le ۱,$$

که در آن:

$$f(x,y)=x\cos y+\frac{۱}{۲۰}(\cos^{۴}۱-۱)-\frac{۱}{۱۲}\sin ۱(\cos^{۲}۱+۲) \qquad (۴.۴)$$

جواب دقیق $u(x,y)=x\cos y$ می‌باشد.

با استفاده از روش ارایه شده به سیستم معادلات زیر می‌رسیم:

$$c_{۳}-c_{۱}\cos c_{۲}-(c_{۱}\sin c_{۲}+۱)c_{۳}^{۳}+۲۱=۰,$$

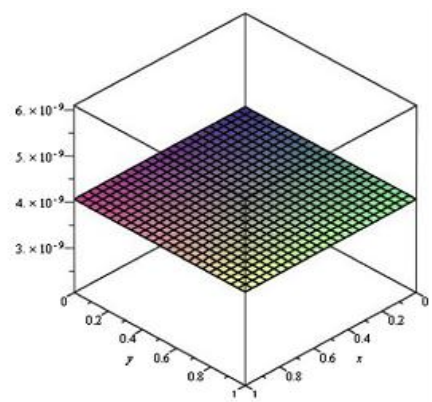
$$c_{۳}-.۴۳c_{۳}^{۳}+.۱۴-c_{۱}\cos c_{۲}-.۴۳c_{۳}^{۳}c_{۱}\sin c_{۲}-.۸۵c_{۳}^{۶}c_{۱}۲\sin c_{۲}^{۲}-۱.۷۱c_{۳}^{۶}c_{۱}\sin c_{۲}-۱.۲۳c_{۳}^{۵}c_{۱}^{۳}\sin c_{۲}^{۳}$$
$$-۳.۶۹c_{۳}^{۹}c_{۱}^{۲}\sin c_{۲}^{۲}-۳.۶۹c_{۳}^{۹}c_{۱}\sin c_{۲}-.۸۵c_{۳}^{۶}-۱.۲۳c_{۳}^{۹}=۰,$$

$$c_{۳}-c_{۱}\cos c_{۲}+.۲۱-.۲۰\sin c_{۲}\cos c_{۲}^{۳}-.۲۵\cos c_{۲}^{۳}-(.۷۵\sin c_{۲}+۱)(c_{۱}c_{۳}^{۳}\sin c_{۲}+c_{۳}^{۳}-.۲۱)\cos c_{۲}^{۲}$$
$$-(\sin c_{۲}+۱.۵)(c_{۱}c_{۳}^{۳}\sin c_{۲}+c_{۳}^{۳}-.۲۱)\cos c_{۲}-(.۵\sin c_{۲}+۱)((c_{۱}\sin c_{۲}+۱)c_{۳}^{۳}-.۲۱)^{۳}=۰,$$

مقادیر $u(c_{۱},c_{۲}),c_{۲},c_{۱}$ بدست می‌آیند.

$$c_{۱}=۰.۶۴۳۲۰۷۹۳۷۴\ ,\qquad c_{۲}=۰.۵۹۲۵۴۶۷۳۴۰\ ,\qquad u(c_{۱},c_{۲})=c_{۳}=۰.۵۳۳۵۵۴۵۴۰۳$$

محاسبات با دقت ۱۰ رقم اعشار انجام شده تابع خطا در شکل (۲) نمایش داده شده است.



شکل ۲

مثال ۳: معادله‌ی انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x,y)=\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{x}{6(1+y)}+\int_0^1\int_0^1\frac{x}{1+y}(1+t+s)u^2(t,s)dtds,\ 0\le x,y\le 1,$$

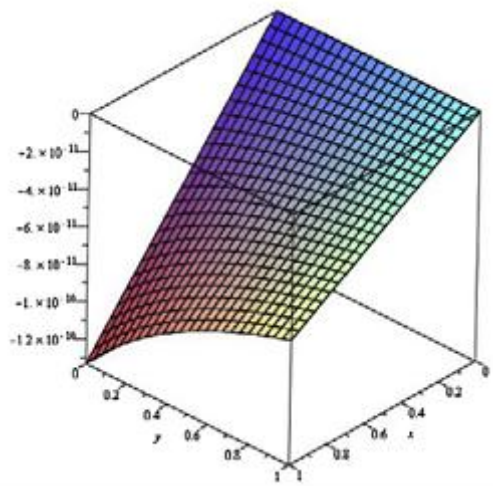
که در آن؛ $0\le x,y\le 1$

جواب دقیق $u(x,y)=\frac{1}{(1+x+y)^2}$ می باشد.

با پیاده سازی روش ارایه شده به یک سیستم سه معادله و سه مجهول می‌رسیم که معادلات با روش نیوتن حل شده‌اند.

$$c_1=0.41150377279,\qquad c_2=0.40561686848,\qquad u(c_1,c_2)=0.30285343322,$$

با در نظر گرفتن دقت آن که تا ۱۰ رقم اعشار محاسبه شده است. تابع خطا در شکل (۳) آمده است.



شکل ۳

مثال ۴) معادله‌ی انتگرال غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x,y) = -\log\left(1+\frac{xy}{1+y^2}\right)+\frac{x}{16(1+y)}+\int_0^1\int_0^1 \frac{x(1-t^2)}{(1+y)(1+s^2)}(1-e^{-u(t,s)})dtds,$$

که در آن؛ $0 \le x, y \le 1$.

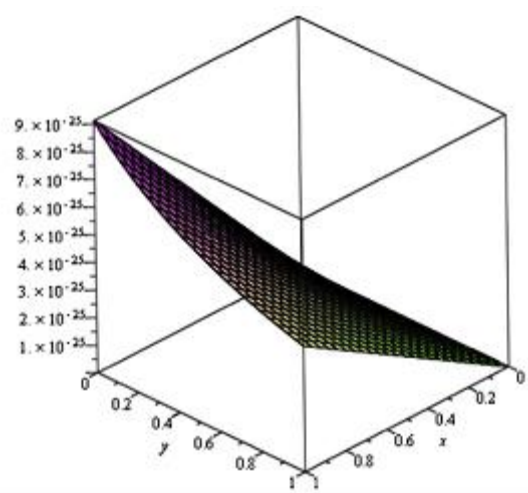
جواب دقیق $u(x,y) = -\log(1+\frac{xy}{1+y^2})$ می باشد.

مقادیر $c_1, c_2, u(c_1,c_2)$ با استفاده از الگوریتم ارایه شده به صورت زیر است:

$$c_1 = 0.624093777706, \qquad c_2 = 0.565957062\text{1}, \qquad u(c_1,c_2) = -0.237063216\text{8},$$

همان طور که در شکل بالا شرح داده شده، معادله انتگرال را با بدست آوردن $c_1, c_2, u(c_1,c_2)$ می توان حل کرد.

تابع خطا در شکل (۴) نمایش داده شده است.



شکل ٤

مثال ۵) معادله‌ی انتگرال سه بعدی زیر را در نظر بگیرید.

$$u(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2(x_3-x_2)+\frac{1}{180}+\frac{1}{5}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 t_1u(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3,$$

که در آن؛ $0\le x_1,x_2,x_3\le 1$.

جواب دقیق $u(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2(x_3-x_1)$ می باشد.

مقادیر بدست آمده برای $u(c_1,c_2,c_3), c_3, c_2, c_1$

با توجه به توصیف الگوریتم ارایه شده مقادیر زیر بدست می‌آیند:

$c_1=.5815519756$, $c_2=.6318813079$, $c_3=.5000000000$, $u(c_1,c_2,c_3)=-.4855450245$

تعداد ارقام استفاده شده در این مسأله ۶۴ رقم است اما در اینجا تنها ۱۰ رقم گزارش شده برای حل معادله انتگرال می‌توان مقادیر $u(c_1,c_2,c_3), c_3, c_2, c_1$ را پیدا کرد.

خطای مطلق آن 9.1×10^{-5} در $[0\ 3]^3$ است.

٤. مقایسه روش IMVM با سایر روش‌های موجود به منظور اثبات کارآیی، دقت و مزیت‌های محاسباتی آن

در این قسمت مثالهای عددیی را می آوریم که با روش (IMVM) حل شده و با توجه به اینکه نحوه محاسبه روش ذکر شده در بخش های قبل بیان شده است دو نوع مثال را ارائه داده ایم .

در اینجا نشان می دهیم که روش (IMVM) برای حل معادلات انتگرال در ابعاد بالا با هسته‌های ضعیف و قوی نسبت به DSM کارآمدتر است و با هدف نشان دادن سادگی روش قضیه مقدار میانگین (IMVM) برای حل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی فردهلم نوع

دوم در ابعاد دلخواه نتایج عددی و مقایسه آن با سایر روش‌های دیگر این کارایی، دقت و سادگی IMVM را تأیید می‌کند و قابلیت رقابت با دیگر روش‌ها را دارد .

برای سادگی محاسبات $c(x)$ را به عنوان ثابت در قضیه مقدار میانگین انتخاب شده است .

روش ارایه شده در این پژوهش با استفاده از الگوریتم‌های جدید انجام شده و c را به عنوان یک تابع از در نظر گرفته‌ایم .

در این پژوهش به طور خاص در مقایسه IMVM باDSM[1] ، گرچه اساس روش هر دو جایگزینی است اما نمی‌توان آنها را یکسان در نظر گرفت. در برخی موارد روش IMVM برای حل معادلات انتگرال از DSM آسان‌تر است .

در بررسی مقایسه روش جایگزینی بین دو روش IMVM و DSM برای حل معادلات انتگرال دو بعدی به صورت زیر بیان می‌شود .

IMVM : سیستم نهایتاً به سه معادله و سه مجهول منتهی می‌شود .

DSM : تعداد مجهولات بستگی به هسته ضعیف دارد .

اگر ما در نظر بگیریم :

$$k(x,y,t,s)=\sum_{i=0}^{N} g_i(x,y)h_i(s,t)$$

در روش :DSM سیستم به n+۱معادله و n+۱مجهول منجر می‌شود .

مثال ۱: معادله‌ی انتگرال با هسته‌ی منحط زیر را در نظر بگیرید .

که در آن: $0 \le x,y \le 1$

$$k(x,y,t,s)=\sum_{i=0}^{1000}\sum_{j=0}^{1000}\frac{(2y)^i\,(3s)^j}{5^{i+j+2}}$$

[1] direct substitution method

$f(x,y)$ با جواب دقیق $u(x,y)=x^{۲}y^{۳}$ سازگار است.

با استفاده از روش IMVM مقدارهای $c_{۱},c_{۲},u(c_{۱},c_{۲})$ به شرح زیر پیدا می‌شوند:

$c_{۱}=۰.۵۷۷۳۵۰۲۶۹۱$, $c_{۲}=۰.۶۶۷۴۹۱۰۹۴۰$, $u(c_{۱},c_{۲})=۰.۰۹۹۱۳۲۲۹۷۵۸$

و می‌توانیم جواب دقیق $u(x,y)=x^{۲}y^{۳}$ را بدست آوریم اما جواب آن از روش DSM به یک سیستم ۱۰۰۱ معادله و ۱۰۰۱ مجهول نیاز است. بنابراین IMVM در ابعاد بالا کارآمدتر است.

دومین تفاوت در ساختار معادلات با مثال ۲ توضیح داده شده است.

مثال ۲) معادله‌ی انتگرال با هسته قوی در نظر بگیرید:

$$u(x,y)=f(x,y)+\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}k(x,y,t,s)u(t,s)dtds$$

که در آن؛ $۰\le x,y\le ۱$

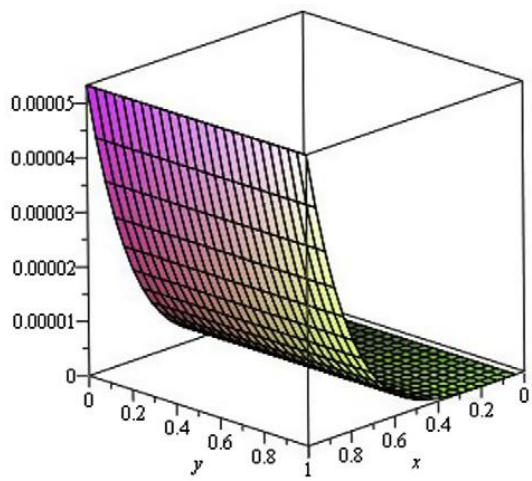
$$k(x,y,t,s)=\exp\left((\frac{x}{۵})^{۵}t\right)-۱$$

جواب واقعی $u(x,y)=xy$ است.

با روش IMVM مقادیر c_1 و c_2 و $u(c_1,c_2)$ به شرح زیر بدست می‌آیند.

$$c_1 = ۰.۱۷۶۴۸۸۵۸۹ \ , \qquad c_2 = ۰.۰۵۷۵۶۵۱۹۸۴\ ۹, \qquad u(c_1,c_2) = ۱.۷۷۸۶۹۳۷۷۶ \times ۱۰^{-۱۶}$$

تابع خطا در شکل (۵) نمایش داده شده است.



شکل ۵

نکات: ۱) DSM: تنها می‌تواند معادلات انتگرال با هسته‌های ضعیف را حل می‌کند.

۲) IMVM: قابلیت حل معادلات با هسته‌های ضعیف و قوی را دارد. بنابراین استفاده از روش جدید IMVM از مزایای ویژه‌ای برخوردار است. از آنجایی که کاربرد این روش

برای برخی از معادلات انتگرال که دارای هسته‌های ضعیف و قوی هستند معتبر است، برای انواع دیگر از معادلات انتگرال می‌تواند موضوع یک تحقیق جدید باشد.

۵. نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای تحقیقات آینده

در این مقاله، روشی کارآمد و دقیق برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندمتغیره با استفاده از قضیه مقدار میانگین انتگرال (IMVM) و توابع پالس بلوکی (BPFs)ارائه شد. با به‌کارگیری این روش، انتگرال‌های چندگانه موجود در معادلات به سیستم‌های مستقل خطی تبدیل شده و ابعاد محاسباتی به طور چشمگیری کاهش یافت، به گونه‌ای که از رشد نمایی مجهولات جلوگیری می‌شود. انتخاب توابع پالس بلوکی به عنوان پایه تقریب، علاوه بر ساده‌سازی فرآیند انتگرال‌گیری، موجب افزایش دقت و سرعت محاسبات شد. نتایج عددی در ابعاد دو و سه نشان داد که روش IMVM–BPF در مقایسه با روش‌هایی مانندDSM ، علاوه بر کاهش تعداد معادلات نهایی، از نظر پایداری و دقت نیز برتری دارد و قادر است معادلات با هسته‌های ضعیف و قوی را با موفقیت حل کند. این ویژگی‌ها، همراه با قابلیت تعمیم روش به ابعاد بالاتر، نشان می‌دهد که IMVM–BPF ابزاری انعطاف‌پذیر و قابل اعتماد برای حل معادلات انتگرال چندبعدی در کاربردهای مختلف علمی و مهندسی است و می‌تواند پایه‌ای برای توسعه الگوریتم‌های عددی پیشرفته در مسائل پیچیده باشد.

۶. پیشنهادات برای تحقیقات آینده

- توسعه روش برای معادلات غیرخطی پیچیده‌تر: بررسی کاربرد IMVM برای معادلات فردهلم غیرخطی با هسته‌های بسیار ناپیوسته یا دارای تغییرات شدید.

- ادغام با روش‌های بهینه‌سازی: ترکیب IMVM با الگوریتم‌های بهینه‌سازی عددی برای حل مسائل با ابعاد بسیار بالا یا مسائل چندفازی.
- استفاده در مدل‌های فیزیکی و مهندسی خاص :اعمال روش در مسائل واقعی در مکانیک سیالات، الکترومغناطیس، فیزیک پلاسما و سیستم‌های بیولوژیکی.
- مقایسه با روش‌های پیشرفته دیگر: تحلیل عملکرد IMVM در مقایسه با روش‌های نوین شبکه عصبی، یادگیری ماشین و روش‌های طیفی برای حل معادلات انتگرال چندبعدی.
- توسعه نرم‌افزار کاربردی: طراحی بسته‌های نرم‌افزاری یا کتابخانه‌های محاسباتی برای پیاده‌سازی سریع و خودکار روش IMVM–BPF در حل معادلات انتگرال چندبعدی.

منابع و مآخذ

۱. *Atkinson, K. E. (۱۹۹۷). The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. Cambridge University Press.*

۲. *Brunner, H., & Kauthen, J.-P. (۱۹۸۹). The numerical solution of two-dimensional Volterra integral equations by collocation and iterated collocation. IMA Journal of Numerical Analysis, ۹, ٤۱۷-٥۹.*

۳. *Deb, A., & Sen, S. K. (۱۹۹٤). Block pulse functions, the most fundamental of piecewise constant basis functions. International Journal of Systems Science, ۲٥(۲), ۳٥۱-۳٦۳.*

٤. *Farengo, R., Lee, Y. C., & Guzdar, P. N. (۱۹۸۳). An electromagnetic integral equation: application to microtearing modes. Physics of Fluids, ۲٦, ۳٥۱٥-۳٥۲۳.*

٥. *Graham, I. G. (۱۹۸۱). Collocation method for two-dimensional weakly singular integral equations. Journal of the Australian Mathematical Society (Series B), ۲۲, ٤٥٦-٤۷۳.*

٦. *Han, G. Q., Hayami, K., Sugihara, K., & Wang, J. (۲۰۰۰). Extrapolation method of iterated collocation solution for two-dimensional non-linear Volterra integral equation. Applied Mathematics and Computation, ۱۱۲, ٤۹-٦۱.*

۷. *Han, G. Q., & Zhang, L. Q. (۱۹۹٤). Asymptotic error expansion of two-dimensional Volterra integral equation by iterated collocation. Applied Mathematics and Computation, ٦۱, ۲٦۹-۲۸٥.*

۸. *Jiang, Z. H., & Schaufelberger, W. (۱۹۹۲). Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems. Springer-Verlag.*

۹. *Kauthen, J. P. (۱۹۸۹). Continuous time collocation method for Volterra-Fredholm integral equations. Numerische Mathematik, ٥٦, ٤۰۹-٤۲٤.*

۱۰. *Kythe, P. K., & Puri, P. (۲۰۰۲). Computational Methods for Linear Integral Equations. Birkhäuser.*

۱۱. *McKee, S., Tang, T., & Diogo, T. (۲۰۰۰). An Euler-type method for two-dimensional Volterra integral equations of the first kind. IMA Journal of Numerical Analysis, ۲۰, ٤۲۳-٤٤۰.*

۱۲. *Rao, G. P. (۱۹۸۳). Piecewise Constant Orthogonal Functions and Their Application to Systems and Control. Springer-Verlag.*

۱۳. *Tzafestas, S. G. (Ed.). (۱۹۸۵). Walsh Functions in Signal and Systems Analysis and Design. Van Nostrand Reinhold.*

۱٤. *Xie, W. J., & Lin, F. R. (۲۰۰۹). A fast numerical solution method for two dimensional Fredholm integral equations of the second kind. Applied Numerical Mathematics, ٥٩, ۱۷۰۹-۱۷۱۹.*